E.1 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2{\cdot}x^2+3{\cdot}x$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -3{\cdot}x^3+\dfrac{2}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 5{\cdot}x^2-3{\cdot}x^3$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2+3{\cdot}x$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3-2{\cdot}x^2$

E.2 Déterminer la valeur des limites ci-dessous :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2-x$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2+x^3$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto2^-} \dfrac{5}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x-2}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3+x-2$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x+1}{x}$

E.3 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x-3}{2{\cdot}x^2-3}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{4{\cdot}x^2-3{\cdot}x+2}{-3{\cdot}x^2}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^5+x^4}{x^3-x}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5{\cdot}x^4-2{\cdot}x^3}{3{\cdot}x^2-2}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{2{\cdot}x^{10}+x}{6{\cdot}x^{10}-2{\cdot}x^3}$

E.4 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{3}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{x^3+2{\cdot}x}{x^2+x}$ (e) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{-2{\cdot}x^2}{x^4+x^3}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{-2{\cdot}x^2}{x^4+x^3}$

E.5 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{x^2+3{\cdot}x}{2{\cdot}x^2-10{\cdot}x+12}$$

1. Établir les identités suivantes :

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}}=\frac{x{\cdot}(x+3)}{(x-2)(2{\cdot}x-6)}$$

2. Dresser le tableau de signes de $(x{-}2)(2x{-}6)$.
3. En déduire la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\mapsto2^-} f(x)$

(f) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$

E.6 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{1}{2{\cdot}x^2-5{\cdot}x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{1}{2{\cdot}x^2-12{\cdot}x+16}$

E.7 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} \dfrac{x+4}{3x^2-x-4}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \dfrac{x^2+x-3}{3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4}$

E.8 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x^6+2x^3}{2x^8-x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{3x^5-x^3}{x^4+x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto3^+} \dfrac{1}{-2x^2+4x+6}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{-3x^2+5x+2}$

E.9 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{2{\cdot}x^3+x-2}{-x^2-2}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{3{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2}{x^4+x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto3^+} \dfrac{x-6}{2x^2-15x+27}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} \dfrac{2x^2+5x+3}{-x^2+x+2}$

E.10 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x-x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} \dfrac{x^2+6x+3}{2{\cdot}x^2+x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x^2+14x-4}{x+5}-3x+1$

E.11 En traçant la courbe représentative de fonctions à l'aide de la calculatrice ou de logiciel de tracer, émettre une conjecture sur l'ensemble de définition et sur les asymptotes à la courbe de chacune des fonctions ci-dessous :

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ (b) $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

(c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$ (d) $j(x)=\dfrac{(x^2{+}1)\sqrt{x^2{-}2x{+}1}}{x-1}$

E.12 On considère la fonction f définie par :

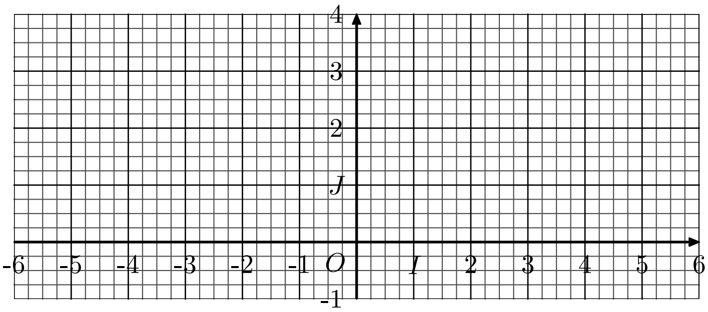
$$f\colon x\longmapsto\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. (a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Quelles asymptotes admet la fonction f ?
3. (a) Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :

   $$f'(x)=\frac{-6x^2+12x+18}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$$

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer la droite (Δ), les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous :



E.13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+x+12}{4{\cdot}x^2+4}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. (a) Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant l'égalité :

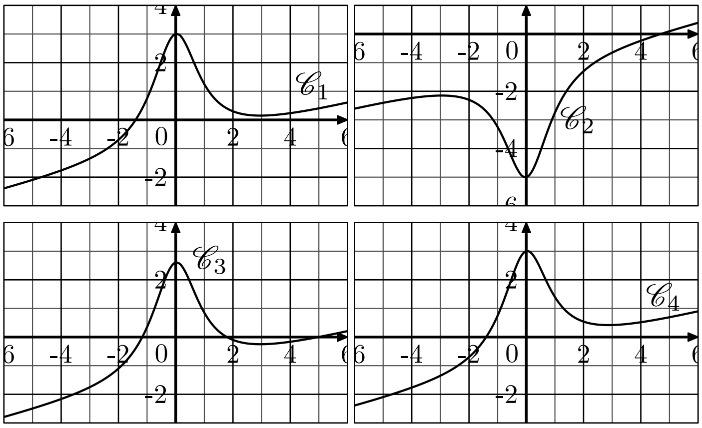
   $$f(x)=a{\cdot}x+b+\frac{16}{4{\cdot}x^2+4}$$

   (b) On note (d) la droite d'équation : $y=\dfrac{1}{4}{\cdot}x-1$.

   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).

③ Déterminer la valeur de la limite :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)-\left(\frac{1}{4}\cdot x-1\right)$$

④ Ci-dessous sont représentées les quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$. Laquelle de ces courbes est la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ?



E.14 Soit f définie sur l'ensemble $]-2\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x)=\frac{-(x-2)^2}{2\cdot(x-1)\cdot(x+2)}$$
Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

① ⓐ Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

ⓑ Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ et leurs caractéristiques.

② On note (d) la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{2}$.

ⓐ Déterminer la valeur des réels a, b, c réalisant l'égalité suivante :
$$f(x)=a+\frac{b\cdot x+c}{2\cdot(x-1)\cdot(x+2)}$$

ⓑ En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (d) sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$

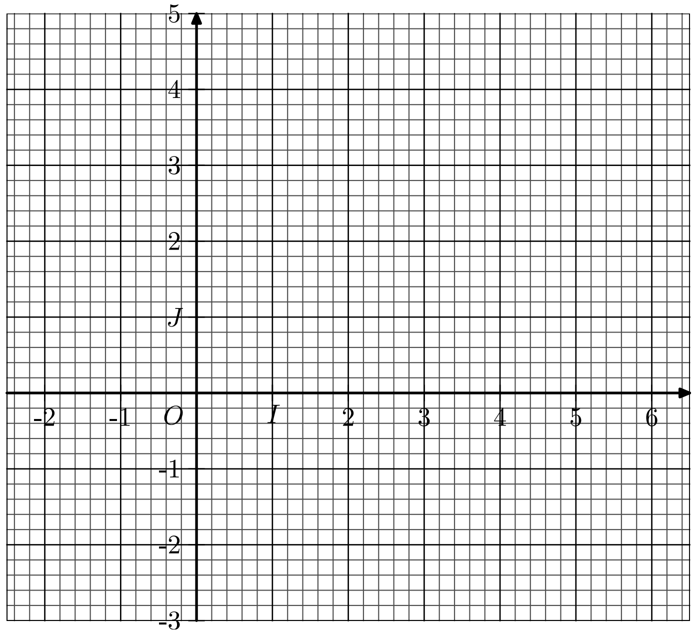
③ ⓐ Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

ⓑ Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet aux points d'abscisses $\dfrac{2}{5}$ et 2 des tangentes horizontales.

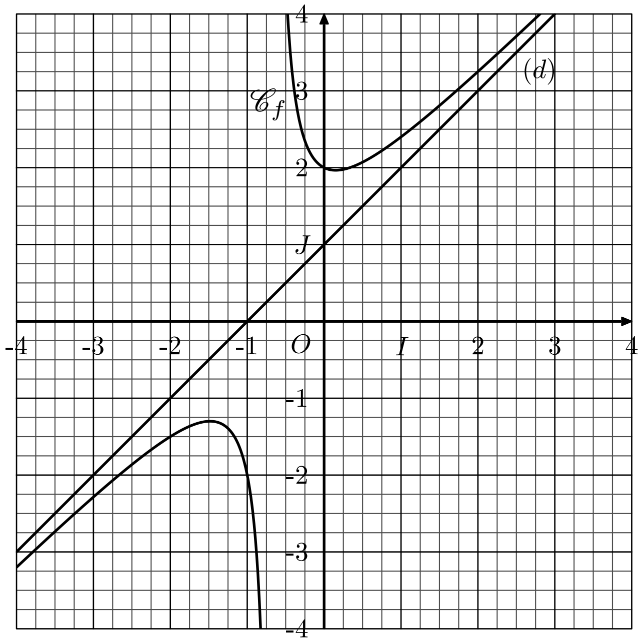
ⓒ Dresser le tableau de variations de la fonction f ; on admettra que l'image de $\dfrac{2}{5}$ par la fonction f est $\dfrac{8}{9}$.

④ Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

⑤ Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère donné en annexe ; on représentera les asymptotes et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que les droites (d) et (T).



E.15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$ par :
$$f(x)=\frac{3\cdot x^2+5\cdot x+4}{3\cdot x+2}$$
On notera $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ ci-dessous :



La droite (d) est la représentation de la fonction g définie par :
$$g(x)=x+1$$

① ⓐ Donner, sans justification, les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

ⓑ Préciser si la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet des asymptotes.

② ⓐ Déterminer les réels a, b et c réalisant l'égalité :
$$f(x)=a\cdot x+b+\frac{c}{3\cdot x+2}$$

ⓑ En déduire que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' définie par :
$$f'(x)=\frac{9\cdot x^2+12\cdot x-2}{(3\cdot x+2)^2}$$

ⓒ Dresser, en justifiant votre démarche, le tableau de variations de la fonction f.
On n'indiquera pas la valeur des extremums de f.

③ Pour tout entier naturel n, on considère :
- M_n le point de (d) d'abscisse n,

- N_n le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse n,
- S_n le segment $[M_nN_n]$.

a. Représenter sur le graphique les segments S_0, S_1 et S_2.

b. Donner la mesure exacte du segment S_0.

c. Que peut-on dire de la longueur du segment $[M_nN_n]$ lorsque la valeur de n tend vers $+\infty$.

E.16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{9}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x}-3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$$f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}\cdot\left(\frac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

E.17 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{5}{x^2+2-\cos x}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Établir l'encadrement suivant :
$$\frac{5}{x^2+3}\leqslant f(x)\leqslant\frac{5}{x^2+1}$$
   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)$$

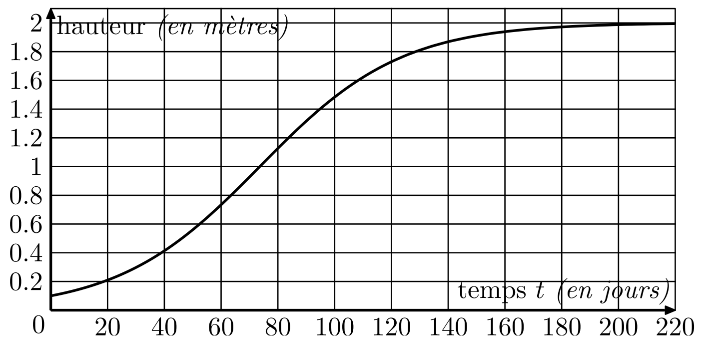
E.18 Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x\cdot\frac{2+\cos x}{4}+\sin x$

E.19 Déterminer la valeur de la limite ci-dessous :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3+\cos x}{1+x}$$

E.20 On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissante par une fonction logistique du type :

$$h(t)=\frac{a}{1+b\cdot\mathrm{e}^{-0{,}04\cdot t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0{,}1\,m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2\,m$.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.